MPSI **DS de mathématiques n°10** 23 mai 2026

DS de mathématiques n°10

Matrices et AL, permutations, déterminants, théorie de l'intégration

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées. La clarté de la copie fera varier la note de ± 1 point.

Les questions simples doivent être traitées rapidement, ne perdez pas de temps au brouillon !

/15,5 1 Pour s'échauffer

1) Soit λ un réel. On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie de la manière suivante : pour tout polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on pose

$$\varphi(P) = \quad bX^3 + cX^2 + dX + a \quad - \lambda P(X)$$

/2,5 **a)** Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, qu'on notera M.

/5 **b)** Exprimer le déterminant de M en fonction de λ. Est-ce que l'application φ est bijective ? Discuter selon la valeur de λ.

/6 **c)** Déterminer le rang de M en discutant selon les valeurs de λ.

/2 **2)** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{4} & 1 & \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ? *On ne demande pas de calculer la matrice inverse si elle existe.*

/22 2 L'ensemble des permutations paires

Dans cet exercice, on considère un entier $n \geq 5$. On note S_n le groupe symétrique d'ordre n, et on rappelle que $(S_n, \circ)$ est un groupe. Pour deux permutations σ et τ de S_n, on notera $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$. On note A_n le sous-ensemble des permutations paires de S_n, i.e. dont la signature vaut 1.

/1,5 **1)** Soit $p \in [\![2, n]\!]$. On considère un p-cycle σ de S_n. À quelle condition est-ce que σ appartient à A_n ?

/2,5 **2)** Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ un élément de S_5. Quelles sont les valeurs possibles du couple (α, β) ? Déterminer la signature de σ en discutant selon la valeur de (α, β).

/4 **3)** Montrer que A_n est un sous-groupe de S_n.

/2 **4)** Donner le cardinal de S_3, puis donner tous les éléments de S_3.

/3,5 **5)** Donner tous les éléments de A_3. Montrer que le groupe A_3 est commutatif en vérifiant tous les produits possibles.

/6 **6)** On note $\varphi : A_n \to S_n \setminus A_n$ l'application définie par $\varphi(\sigma) = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que φ est bien définie et est une bijection.

/2,5 **7)** En déduire le cardinal de A_n en fonction de n.

/27,5 3 Limite de $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$ par des intégrales

Soit n un entier naturel et I_n l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^{2n} \, dx$$

avec la convention : $(\tan x)^0 = 1$.

/1,5 **1)** Calculer I_0, puis $I_0 + I_1$.

/4 **2)** Déterminer une expression simple de $I_n + I_{n+1}$

3) On suppose dans cette question que $n \geq 1$. Déduire des résultats précédents une expression de $I_0 + (-1)^{n+1} I_n$ sous la forme d'une somme qui dépend uniquement de n et qu'on ne cherchera pas à calculer.

/8

4) Conjecturer une limite pour I_n lorsque n tend vers l'infini. Donner une explication à votre conjecture.

/3

/10 **5)** Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers l'infini.
Indication : introduire un réel α de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et remarquer que

$$I_n = \int_0^\alpha (\tan x)^{2n}\, dx + \int_\alpha^{\pi/4} (\tan x)^{2n}\, dx$$

Puis montrer que α et l'entier n peuvent être choisis de façon que la somme de ces deux intégrales soit inférieur à un réel $\varepsilon > 0$ donné.

6) En déduire la limite, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, de l'expression suivante :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

/1

4 Comatrice et symétrie

Soit $n \geq 2$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

/6 **1)** Montrer que A est symétrique si et seulement si la comatrice de A est symétrique.

2) Montrer que cette équivalence n'est plus vraie si on ne suppose pas A inversible, en utilisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5 Une équation fonctionnelle

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 qui vérifient l'équation

$$(E) : \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

L'objectif est de montrer que les solutions de (E) sont exactement les fonctions linéaires, i.e. les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$. On considère f une solution quelconque de (E).

1) Déterminer $f(0)$.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que pour tout réel x :

$$\int_x^{x+1} f(u)du = f(x) + \int_0^1 f(y)dy$$

4) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = f(1)$.

5) Conclure, en précisant le raisonnement utilisé.

Relationships are like algebra. You look at your X and wonder Y...